Лободиной Ольги, 246гр.

Реферат:

Реализация алгоритма для решения проблемы выполнимости булевой функции, заданной 2-КНФ.

Идея:

Рассмотрим входную 2 – КНФ формулу. Во-первых, ясно, что можно быстро исключить все дизъюнкции, состоящие из одного терма — если это дизъюнкция типа x_i , то для выполнимости формулы необходимо $x_i = 1$, соответственно мы фиксируем $x_i \equiv 1$ и автоматически исключаются все дизъюнкты, куда эта переменная входит в положительной степени, т.к. их выполнимость гарантирована. Если есть дизъюнкт, куда такая переменная входит в отрицательной степени - формула неразрешима. Аналогично (с точностью до наоборот) избавляемся от переменных, "засветившихся" в дизъюнкции ($\neg x_i$). Если после редукции, неразрешимость формулы еще не проявилась, у нас остается формула, состоящая из дизъюнктов включающих ровно два терма.

Теперь заметим, что формула ($x \vee y$) эквивалентна формуле $(\neg x \to y) \wedge (\neg y \to x)$. Последней формуле , легко придать интерпретацию на графе: для 2 – КНФ формулы, содержащей n переменных x_i , сопоставим ориентированный граф из 2n узлов: $\forall$ x_i, $\neg x_i$, а для каждой дизъюнкции ($x \vee y$) он будет содержать два ребра ($\neg x \to y$) и ($\neg y \to x$). В разрешимой формуле, истинность терма $x_i^{\sigma i}$ означает истинность всех термов $x_j^{\sigma j}$ достижимых (в смысле путей в ориентированном графе) в графе из узла, соответствующему терму $x_i^{\sigma i}$.

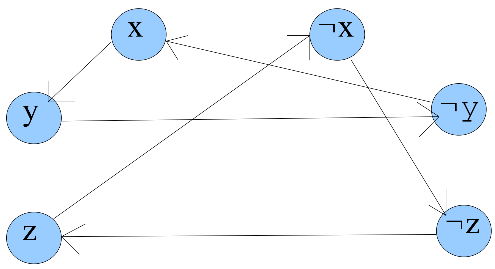
Обозначим через $x \Rightarrow y$ существование пути из узла x в узел y. Тогда если для некоторого x_i будет существовать пути $x_i \Rightarrow \neg x_i$ и $\neg x_i \Rightarrow x_i$, то формула будет неразрешима. Действительно, при $x_i = 1$, "нарушается" первый путь, а при $x_i = 0$, «нарушается» второй путь.

В противном случае, покажем, как сделать выполняющее присваивание. Для каждой переменной x, если есть путь $x \Rightarrow \neg x$, то присваиваем ей «0», в противном случае «1».

Поиск путей в графе выполняется за полиномиальное время, таким образом, задача полиномиально разрешима.

Представление на графе:

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z)$ – выполнима (так как нет пути из x в $\neg x$ и из $\neg x$ в x)



Для решения задачи введем понятие матрицы достежимости:

Матрица достижимости простого ориентированого графа G = (V,E) — бинарная матрица замыкания по транзитивности отношения E (оно задаётся матрицей смежности графа). Таким образом, в матрице достижимости хранится информация о существовании путей между вершинами орграфа.

Способы построения матрицы достежимости:

Пусть дан простой граф G = (V,E), матрица смежности которого есть

$$\mathbf{E} = (e_{ij})_{n \times n}$$

где

$$e_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$$

Матрица смежности даёт информацию о всех путях длины 1 (то есть, рёбрах) в орграфе. Для поиска путей длины 2 можно найти композицию отношения E с самим собой:

$$E \circ E = \{(a,c) : \exists b \in V : (a,b),\ (b,c) \in E\}$$

По определению, матрица композиции отношений E o E есть:

$$\mathbf{E^2} = (e^2{}_{ij})_{n \times n} = \left(\sum_k e_{ik} e_{kj}\right) = \Big((e_{i1} \wedge e_{1j}) \vee (e_{i2} \wedge e_{2j}) \vee \ldots \vee (e_{in} \wedge e_{nj})\Big)$$

После нахождения матриц E^k композиции $\underbrace{E \circ \ldots \circ E}_{k}$ где для всех k, 1 <= k <= n будет получена информация о всех путях длины от 1 до n. Таким образом, матрица:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} \vee \mathbf{E^2} \vee \ldots \vee \mathbf{E^n} = (e^*{}_{ij})_{n \times n} = (e_{ij} \vee e^2{}_{ij} \vee \ldots \vee e^n{}_{ij})$$

есть искомая матрица достижимости.

Если булевы операции дизъюнкции и конъюнкции заменить обычными алгебраическими операциями сложения и умножения соответственно, нахождение матрицы достижимости E* сведётся к обычному пошаговому перемножению матриц с последующим сложением результатов каждого шага. Тогда получившаяся матрица E* будет состоять не только из 0 и 1 и будет характеризовать не только наличие путей между вершинами, но уже и количество таких путей. В таком случае можно разрешить наличие кратных рёбер в графе.

Исходный код программы в mathematica:

КНФ.nb

```
In[1143]:= "берем переменные x, y, z";
n = 3;
a = Table[0, {i, 2*n}, {j, 2*n}];
"эквивалентно записи (x + не y)*(y + не z)*(z + не x)*(x + y)*(не y + не z)";
knf = {1, -2, 2, -3, 3, -1, 1, 2, -2, -3};

i = 1;
While[i ≤ Length[knf],
  x = Abs[knf[[i]]] * 2 - 1;
  y = Abs[knf[[i + 1]]] * 2 - 1;
  If[knf[[i]] < 0, x = x + 1];
  If[knf[[i + 1]] < 0, y = y + 1];
  If[Mod[x, 2] == 0, notx = x - 1, notx = x + 1];
  If[Mod[y, 2] == 0, noty = y - 1, noty = y + 1];
  a[[notx, y]] = 1;
  a[[noty, x]] = 1;
  i = i + 2] ;
Print["Матрица смежности"];
Print[a // MatrixForm];

b1 = a;
sum = a;
i = 2;
While[i ≤ 2*n,
  b1 = b1.a;
  sum = sum + b1;
  i = i + 1
 ];
Print["Матрица достежисти"];
Print[sum // MatrixForm];

i = 1;
x = Table[0, {i, n}];
While[i ≤ n,
  If[sum[[2*i, 2*i - 1]] * sum[[2*i - 1, 2*i]] ≠ 0,
   Print["не выполнима по ", i, " переменной"];
   x[[i]] = -1,
   If[sum[[2*i, 2*i - 1]] ≠ 0, x[[i]] = 1]];
  i = i + 1];
Print[x];
```

110%

Ответ при knf = {1, -2, 2, -3, 3, -1, 1, 2, -2, -3}:

Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix достежисти

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 5 & 3 & 10 \\ 10 & 10 & 5 & 5 & 10 & 10 \\ 5 & 5 & 10 & 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 10 & 10 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 5 & 5 & 10 & 10 \\ 10 & 3 & 5 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

не выполнима по 1 переменной

не выполнима по 2 переменной

не выполнима по 3 переменной

{-1, -1, -1}

Ответ при knf = {-1, 2, -2, 3, 1, -3} (пример, приведенный выше на графе):

Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица достежисти

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

{0, 0, 0}